Espaces préhilbertiens

I. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1°) Formes bilinéaires symétriques

Déf : On appelle forme bilinéaire symétrique sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

α) $\forall x \in E$, $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire (linéarité à droite)

β) $\forall y \in E$, $x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire (linéarité à gauche)

γ) $\forall x,y \in E, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ (symétrie)

On note $\mathcal{BS}(E)$ l'ensemble de ces applications

Théorème :

L'ensemble $\mathcal{BS}(E)$ des formes bilinéaires symétriques sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E \times E, \mathbb{R})$.

2°) Formes quadratiques

Déf : On appelle forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique φ l'application $q_\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in E, q_\varphi(x) = \varphi(x,x)$.

Prop : Si q est la forme quadratique associée à une forme bilinéaire symétrique φ on a

$q(0) = 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ (en particulier $q(-x) = q(x)$).

et $\forall x,y \in E, q(x+y) = q(x) + 2\varphi(x,y) + q(y)$

Déf : On appelle forme quadratique que E toute application q qui est la forme quadratique associée à une certaine forme bilinéaire symétrique. On note $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble de ces applications.

Théorème :

$\mathcal{Q}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,\mathbb{R})$ et l'application $\mathcal{BS}(E) \to \mathcal{Q}(E)$ qui à φ associe q_φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Déf : On appelle forme polaire associée à une forme quadratique q l'unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $q = q_\varphi$.

Théorème :

Si q est une forme quadratique sur E alors sa forme polaire φ est donnée par :

$\forall x,y \in E, \varphi(x,y) = \frac{1}{4}\big(q(x+y) - q(x-y)\big)$ (identité de polarisation)

3°) Positivité

Déf : Une forme quadratique q sur E est dite positive ssi $\forall x \in E, q(x) \geq 0$.

Une forme quadratique q sur E est dite définie positive ssi elle est positive et $\forall x \in E, q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Ce vocabulaire se transposent aux formes bilinéaires symétriques.

Théorème : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si q est une forme quadratique positive de forme polaire φ : $\forall x,y \in E, \big(\varphi(x,y)\big)^2 \leq q(x)q(y)$.

Si de plus φ est définie, il y a égalité ssi (x,y) est liée.

4°) Cas de la dimension finie

Ici E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$

a) matrices symétriques

Déf : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique ssi ${}^tA = A$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Prop : $\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Prop : Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors $q(X) = {}^tXAX$ est une forme quadratique sur $M_{n,1}(\mathbb{K})$ dont la forme polaire est donnée $\varphi(X,Y) = {}^tXAY$.

Déf : Une matrice symétrique A est dite positive ssi $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), {}^tXAX \geq 0$ (resp. ≤ 0)

Une matrice symétrique A est dite définie ssi $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), {}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0$.

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives carrées d'ordre n et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices définies positives.

b) matrice d'une forme quadratique

Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. On convient de noter X,Y les colonnes des composantes de x,y dans $\mathcal{B}$.

Théorème :

Pour toute forme bilinéaire symétrique φ sur E, il existe une unique matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ pour laquelle : $\forall x,y \in E$, $\varphi(x,y) = {}^tXAY$.

De plus la matrice A est donnée par $A = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = \varphi(e_i,e_j)$.

Cor : Si q est la forme quadratique associée à φ, $q(x) = {}^tXAX$.

Déf : On appelle matrice de la forme quadratique q (ou de la forme bilinéaire symétrique φ) dans la base $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ de E la matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{i,j} = \varphi(e_i,e_j)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Théorème :

L'application $M : \mathcal{Q}(E) \mapsto \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie par $M(q) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Cor : $\dim \mathcal{Q}(E) = \dim \mathcal{BS}(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Prop : q est positive (resp. définie positive) ssi sa matrice l'est.

c) rang d'une forme quadratique

Prop : Les matrices d'une même forme quadratique q (resp. d'une forme bilinéaire symétrique φ) dans différentes bases de E ont le même rang.

Déf : Cette valeur commune est appelée rang de la forme quadratique q, on le note $\mathrm{rg}\, q$.
Ce vocabulaire se transpose aux formes bilinéaires symétriques.

Déf : Une forme quadratique q (resp. une forme bilinéaire symétrique) est dite non dégénérée ssi $\mathrm{rg}\, q = \dim E$.

Prop : Une forme quadratique définie est non dégénérée.

II. Structure préhilbertienne réelle

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1°) Produit scalaire

Déf : On appelle produit scalaire (euclidien) sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive.

Déf : On appelle espace préhilbertien réel tout couple (E,φ) formé d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et d'un produit scalaire φ sur E. Il est alors usuel de noter $(x \mid y)$ au lieu de $\varphi(x,y)$ le produit scalaire de deux vecteurs de E.

2°) Norme euclidienne

Déf : On appelle norme euclidienne l'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ définie par $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

Prop : (Identités remarquables)

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$,

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x\,|\,y) + \|y\|^2$,

$\|x\|^2 - \|y\|^2 = (x-y\,|\,x+y)$.

Prop : (Identités du parallélogramme et de polarisation)

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ et $(x\,|\,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$.

Théorème : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$\forall x, y \in E, |(x\,|\,y)| \leq \|x\|.\|y\|$ avec égalité ssi x et y sont colinéaires.

Théorème :

$\|.\| : E \to \mathbb{R}$ est une norme sur E et le produit scalaire est continue pour celle-ci.

Prop : On a $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ ssi x et y colinéaires et $(x\,|\,y) \geq 0$.

Déf : Si l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est complet, on dit que E est un espace de Hilbert réel.

III. Structure préhilbertienne complexe

E et F désignent des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

1°) Sesquilinéarité

Déf : Une application $f : E \to F$ est dite semi-linéaire ssi $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x, y \in E, f(\lambda x + \mu y) = \overline{\lambda} f(x) + \overline{\mu} f(y)$.

Déf : On appelle forme sesquilinéaire sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que :

1) $\forall x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire,

2) $\forall y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est semi-linéaire.

2°) Produit scalaire

Déf : On appelle produit scalaire (hermitien) sur E toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ vérifiant :

1) φ est une forme sesquilinéaire sur E,

2) $\forall x, y \in E$, $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$ (symétrie hermitienne)

3) $\forall x \in E$, $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}^+$ (positivité)

4) $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Déf : On appelle espace préhilbertien complexe tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire généralement noté $(.\,|\,.)$.

3°) Norme hermitienne

Déf : On appelle norme associée au produit scalaire E l'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ définie par réel :

$\|x\| = \sqrt{(x\,|\,x)}$.

Prop : (Identités remarquables)

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x\,|\,y) + \|y\|^2$,

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x\,|\,y) + \|y\|^2$.

Prop : (Identités du parallélogramme et de polarisation)

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ et $(x\,|\,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2\right)$.

Théorème : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tout $x, y \in E$, $|(x\,|\,y)| \leq \|x\|\|y\|$ avec égalité ssi la famille (x, y) est liée.

Théorème :

L'application $x \mapsto \|x\|$ est une norme sur E et le produit scalaire est une application continue pour celle-ci.

Déf : Si l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est complet, on dit que E est un espace de Hilbert complexe.

IV. Orthogonalité

E désigne un espace préhilbertien réel ou complexe.

1°) Vecteurs orthogonaux

Déf : Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux ssi $(x \mid y) = 0$, on note alors $x \perp y$.

Déf : On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est orthogonale ssi elle est constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux i.e. $\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow (e_i \mid e_j) = 0$.

Prop : Si $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille finie orthogonale : $\|e_1 + \cdots + e_n\|^2 = \|e_1\|^2 + \cdots + \|e_n\|^2$.

Prop : Toute famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre.

Déf : Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite orthonormée ssi elle est constituée de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux i.e. $\forall i, j \in I,\ (e_i \mid e_j) = \delta_{i,j}$.

Prop : Toute famille orthonormée est libre.

Déf : On appelle base orthonormée de E toute base de E qui soit aussi une famille orthonormée.

2°) Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Théorème :

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une famille libre de vecteurs de E.

Il existe une unique famille $(v_1,\ldots,v_n)$ telle que :

1) $(v_1,\ldots,v_n)$ est une famille orthonormée,

2) $\forall 1 \leq k \leq n$, $\text{Vect}(e_1,\ldots,e_k) = \text{Vect}(v_1,\ldots,v_k)$,

3) $\forall 1 \leq k \leq n$, $(e_k \mid v_k) \in \mathbb{R}^{+*}$.

On dit que la famille $(v_1,\ldots,v_n)$ est la famille orthonormalisée de $(e_1,\ldots,e_n)$ par le procédé de Schmidt.

Cor : Si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base alors la famille $(v_1,\ldots,v_n)$ ainsi formée est une base orthonormée.

Cor : Si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une famille orthonormée alors $(v_1,\ldots,v_n) = (e_1,\ldots,e_n)$.

3°) Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Déf : On appelle orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E l'ensemble noté F° ou $F^\perp$ constitué des vecteurs orthogonaux à tout vecteur de F i.e. $F^\perp = \{x \in E / \forall u \in F, (x \mid u) = 0\}$.

Prop : Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ est une base de F alors $x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in I, (e_i \mid x) = 0$.

Prop : $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E en somme directe avec F.

Prop : $F \subset F^{\perp\perp}$

Prop : $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$.

4°) Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Déf : Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits orthogonaux ssi $\forall (x,y) \in F \times G, (x \mid y) = 0$.

Prop : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a équivalence entre :

(i) F et G sont orthogonaux

(ii) $F \subset G^\perp$

(iii) $G \subset F^\perp$.

Prop : Deux sous-espaces vectoriels orthogonaux sont en somme directe. Plus généralement, si $F_1,\ldots F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux alors ceux-ci sont en somme directe.

Déf : On dit alors que la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ est orthogonale et on note parfois $\overset{\perp}{\bigoplus_{i=1}^{n}} F_i$

5°) Supplémentaire orthogonal

Déf : Deux sous-espaces vectoriels sont dits supplémentaires orthogonaux ssi ils sont supplémentaires et orthogonaux.

Théorème :

Si F et G dont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux alors F et G sont fermés, $G = F^\perp$ et $F = G^\perp$.

Déf : Si F et $F^\perp$ sont supplémentaires alors on dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F.

Théorème :

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux.

Cor : Si F est de dimension finie alors $F^{\perp\perp} = F$.

6°) Projection et symétrie orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel tel que F et $F^\perp$ soient supplémentaires.

Déf : On appelle projection orthogonale sur F la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F, la symétrie s_F par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$.

Prop : $\forall x \in E$, $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$ et $\|s_F(x)\| = \|x\|$

Théorème :

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie alors en introduisant $(e_1,\dots,e_p)$ une base orthonormée de F on a: $\forall x \in E$, $p_F(x) = \sum_{j=1}^{m} (e_j \mid x) e_j$.

Cor : (Inégalité de Bessel)

Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une famille orthonormale de vecteurs de E alors : $\forall x \in E, \sum_{i=1}^{n} |(e_i \mid x)| \leq \|x\|^2$.

Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de vecteurs de E alors pour tout $x \in E$: $\sum_{n=0}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2 < +\infty$.

7°) Distance à un sous-espace vectoriel

Déf : On appelle distance d'un vecteur $x \in E$ à un sous-espace vectoriel F de E le réel $d(x,F) = \inf_{y\in F} d(x,y) = \inf_{y\in F} \|x-y\|$.

Théorème :

Soit F un sous-espace vectoriel tel que F et $F^\perp$ soient supplémentaires.

Pour tout $x \in E$ on a : $\forall y \in F, \|x-y\| \geq \|x - p_F(x)\|$ avec égalité ssi $y = p_F(x)$.

Par suite, $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$.

V. Espaces euclidiens et espaces hermitiens

1°) Définition

Déf : On appelle espace euclidien tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.
On appelle espace hermitien tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

2°) Propriétés

Théorème :

Tout espace euclidien (resp. hermitien) possède une base orthonormée.

Théorème : de la base orthonormée incomplète

Toute famille orthonormée d'un espace vectoriel euclidien peut être complétée en une base orthonormée.

Théorème :

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E (resp. hermitien) alors $F^\perp$ est un supplémentaire de F.

Cor : $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ et $F^{\perp\perp} = F$.

Prop : Si F et G sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E alors $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

3°) Base orthonormée

Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien (resp. hermitien) E.

Théorème :

Les composantes $x_1,\dots,x_n$ d'un vecteur x de E dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ sont donnée par $x_i = (e_i \mid x)$ de sorte que $x = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x) e_i$.

Cor : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = (e_i \mid f(e_j))$.

Théorème :

Pour $x, y \in E$ de composantes dans la base orthonormée $\mathcal{B}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on a :

Cas euclidien : $(x \mid y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = {}^t XY$ et $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = {}^t XX$

Cas hermitien : $(x \mid y) = \overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n = X^* Y$ et $\|x\|^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = X^* X$

4°) Isomorphisme canonique entre E et son dual

Soit E un espace vectoriel euclidien (ou hermitien). Pour $a \in E$, on note $\varphi_a : \begin{cases} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto (a \mid x) \end{cases}$.

Prop : φ_a est une forme linéaire sur E de noyau $\{a\}^\perp$ et $\|\varphi_a\| = \|a\|$.

Théorème :

L'application $\phi : E \to E^*$ qui à a associe φ_a est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on l'appelle isomorphisme canonique.